Capítulo Vigesimonoveno
¿PARAÍSO PERDIDO?

CANTOR

La Matemática, como todos los restantes temas, debe ser ahora sometida al microscopio, y revelar al mundo cualquier debilidad que pueda existir en sus fundamentos.
F. W. Westaway

La discutida *Mengenlehre* (teoría de conjunto creada en 1874 - 1895 por Georg Cantor (1845 - 1918) puede muy bien ser considerada, por su orden cronológico, como la conclusión de toda la historia. Este tema es un ejemplo, en la Matemática, del colapso general de aquellos principios que los profetas del siglo XIX, previendo todas las cosas, pero no el gran cataclismo, creyeron que constituían los fundamentos de todas las cosas desde la ciencia física a los gobiernos democráticos.

Si "colapso" es quizá una palabra demasiado fuerte para describir la transformación del mundo que está teniendo lugar, de todos modos es cierto que la evolución de las ideas científicas se está produciendo ahora tan vertiginosamente que no puede distinguirse la evolución de la revolución. Sin los errores del pasado, como un foco de perturbación profundo, la presente revolución en la ciencia física quizá no hubiera sucedido; pero atribuir a nuestros predecesores toda la inspiración que mueve a nuestra propia generación es concederles más de lo debido. Este punto es digno de consideración, pues algunos han estado tentados de decir que la "revolución" correspondiente en el pensamiento matemático, cuya iniciación ahora se aprecia claramente, es simplemente un eco de Zenón y de otros hombres presos de la duda en la antigua Grecia.

Las dificultades de Pitágoras acerca de la raíz cuadrada de 2 y las paradojas de Zenón sobre la continuidad (o "divisibilidad infinita") son, por lo que sabemos, los orígenes de nuestro actual cisma matemático. Los matemáticos actuales que prestan cierta atención a la filosofía (o fundamentos) de su disciplina se descomponen al menos en dos bandos, que al parecer no podrán reconciliarse, sobre la validez del razonamiento utilizado en el Análisis matemático, y este desacuerdo se remonta a través de los siglos hasta la Edad Media, y de aquí a la Antigua Grecia. Todas las facetas han tenido sus representantes en todas las épocas del pensamiento matemático, sea que tal pensamiento haya sido disfrazado por las paradojas, como en el caso de Zenón, o por sutilezas lógicas, como en el caso de los más amargados lógicos de la Edad Media. La raíz de estas diferencias es considerada comúnmente por los matemáticos como una cuestión de temperamento: cualquier intento de convertir a un analista como Weierstrass en el escepticismo de un hombre como Kronecker es tan vano como intentar convertir a un fundamentalista cristiano en un ateo rabioso.

Algunos datos concernientes a esta disputa suelen servir como estimulante, o sedante, según los gustos, para nuestro entusiasmo acerca de la singular carrera intelectual de Georg Cantor, cuya "teoría positiva del infinito" dio lugar en nuestra propia generación, a la más fiera batalla de ranas y ratones (como Einstein la llamó una vez) en la historia acerca de la validez del razonamiento matemático tradicional.

En 1831 Gauss expresó su "horror al infinito real" del siguiente modo: "Protesto contra el uso de la magnitud infinita como una cosa completa, que jamás puede permitirse en Matemática. Infinito es simplemente una forma de hablar, y la verdadera significación es un límite al que ciertas razones se aproximan indefinidamente, mientras otras aumentan sin restricción".

Por tanto, si x es un número real, la fracción $1/x$ disminuye a medida que x aumenta, y podremos encontrar un valor de x tal que $1/x$ difiera de cero en menos de una cantidad dada (que no es cero) que puede ser tan pequeña como nos plazca, y cuando x continúa aumentando, la diferencia permanece menor que esta cantidad dada; el *límite* de $1/x$ "cuando x tiende a infinito" es cero. El símbolo del infinito es ∞; la afirmación $1/\infty$ = cero carece de sentido por dos razones: "la división por infinito" es una operación *indefinida*, y, por tanto, no tiene significación; la segunda razón fue enunciada por Gauss. De modo análogo $1/0 = \infty$ carece de significación.

Cantor está de acuerdo y en desacuerdo con Gauss. Escribiendo en 1886 sobre el problema del infinito actual, (lo que Gauss llamó completo), Cantor dice que "a pesar de la diferencia esencial entre los conceptos del "infinito" *potencial y actual,* el primero significa una magnitud finita *variable,* que aumenta más allá de todos los límites finitos (como x en $1/x$ antes mencionado), mientras el último es una magnitud *constante*, *fija.,* más allá de todas las magnitudes finitas, y ambos son con frecuencia confundidos".

Cantor sigue diciendo que el abuso del infinito en Matemática ha inspirado con razón un horror al infinito entre los matemáticos concienzudos de su época, precisamente como ocurría con Gauss. De todos modos, Cantor mantiene que la "repulsa falta de crítica del legítimo infinito actual es una violación de la naturaleza de las cosas (cualquiera pueda ser, no parece que ha sido revelada a la, humanidad como un todo), que deben ser tomadas como son. Cantor, se alinea así definitivamente con los grandes teólogos de la Edad Media, de los cuales era un ardiente admirador y un profundo conocedor.

Las certidumbres absolutas y las soluciones completas de los viejos problemas siempre pasan mejor si se sazonan bien antes de tragarlos. He aquí lo que Bertrand Russell dijo en 1901 acerca del estudio del infinito, propio de Prometeo, realizado por Cantor:

"Zenón se refería a tres problemas... Tratábase del problema de lo infinitesimal, de lo infinito y de la continuidad... Desde su época a la nuestra, los mejores talentos de cada generación han atacado a su vez estos problemas, pero, hablando en términos generales, no han logrado nada .... Weierstrass, Dedekind y Cantor... los han resuelto completamente. Sus soluciones... son tan claras que no dejan lugar a la menor duda. Esta conquista es probablemente la más importante de que la época puede jactarse... El problema de lo infinitesimal fue resuelto por Weierstrass, la solución de los otros dos fue comenzada por Dedekind y definitivamente acabada por Cantor"[1].

El entusiasmo de sus párrafos nos contagia actualmente, aunque sabemos que Russell en la segunda edición (1924) de su obra, y A. N. Whitehead en sus *Principia Matemática,* admiten que no todo va bien con la cortadura de Dedekind (véase Capítulo XXVII), que es la columna vertebral del Análisis. Tampoco marcha bien actualmente. Más se ha dicho en pro o en contra de un credo particular en la ciencia de la Matemática durante una década que lo que fue realizado en un siglo durante la Antigüedad, en la Edad Media o el Renacimiento. Muchos más hombres de

[1] Citado por R. L Moritz, *Memorabilia Mathemalica, 1914.* La fuente original no he podido encontarla.

talento abordan actualmente los problemas científicos matemáticos sobresalientes que los que lo hicieron anteriormente, y la finalidad ha venido a ser la propiedad privada de los fundamentalistas. Ninguna de las finalidades de las observaciones de Russell de 1901 han sobrevivido. Hace un cuarto de siglo, aquellos que eran incapaces de ver la gran luz que los profetas aseguraban estaba iluminado como el sol del medio día en un firmamento de la media noche eran llamados simplemente estúpidos. En la actualidad para cada partidario competente del bando de los profetas existe un partidario igualmente competente frente a él. Si la estupidez existe en alguna parte está tan uniformemente distribuida que ha cesado de ser un carácter distintivo. Hemos entrado en una nueva era, tina era de humildad, llena de dudas.

En el lado de los dudosos encontramos por esa misma época (1905) a Poincaré. "He hablado... de nuestra necesidad a volver continuamente a los primeros albores de nuestra ciencia, y de las ventajas de esto para el estudio de la mente humana. Esta necesidad ha inspirado dos empresas que han adquirido un lugar muy importante en el desarrollo más reciente de la Matemática. La primera es el cantorismo... Cantor introdujo en la ciencia una nueva forma de considerar el infinito matemático... pero ha ocurrido que hemos encontrado ciertas paradojas, ciertas aparentes contradicciones, que hubieran hecho las delicias de Zenón de Elea y de la Escuela de Megara. Así, cada uno debe buscar el remedio. Por mi parte, y no estoy solo, pienso que lo importante es no introducir jamás entidades no completamente definibles por un número finito de palabras. Siempre que se adopte el cuidado necesario, podemos prometernos el goce que siente el médico llamado a tratar un interesante caso patológico".

Pocos años más tarde el interés de Poincaré por la patología disminuyó algo. En el Congreso Matemático Internacional de 1908, celebrado el Roma, el saciado médico pronunció su pronóstico: "las generaciones posteriores considerarán la *Mengenlehre* como una enfermedad de la cual nos hemos restablecido".

Corresponde a Cantor el gran mérito de haber descubierto, a pesar de sí mismo y contra sus propios deseos, que el "cuerpo matemático" está profundamente enfermo y que la enfermedad con que Zenón la infectó no ha encontrado aún alivio. Su perturbador hallazgo es un hecho curioso dé su propia vida intelectual. Examinaremos primeramente los acontecimientos de su existencia material, no de mucho interés por sí mismos, pero que quizá sean singularmente aclaratorios para los aspectos ulteriores de su teoría.

Descendiente de judíos puros por ambas ramas, Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor fue el hijo mayor del próspero comerciante Georg Waldemar Cantor y de su mujer María Bohm. El padre había nacido en Copenhague, Dinamarca, pero emigró siendo joven a San Petersburgo, Rusia, donde nació el matemático Georg Cantor el 3 de marzo de 1845. Una enfermedad pulmonar fue causa de que el padre se trasladara en 1856 a Francfort, Alemania, donde vivió en un cómodo retiro hasta su muerte en 1863. Debido a esta curiosa mezcla de nacionalidades es posible que diversas patrias reclamen a Cantor como hijo. Cantor se inclinó hacia Alemania, pero no puede decirse que Alemania le favoreciera muy cordialmente.

Georg tuvo un hermano, Constantin, que llegó a ser oficial del ejército alemán (excelente carrera para un judío), y una hermana, Sophie Nobiling. El hermano fue un buen pianista, la hermana dibujaba de un modo perfecto, y la naturaleza artística reprimida de Georg encuentra una turbulenta salida en la Matemática y la filosofía, tanto clásica como escolástica. El marcado temperamento artístico de los hijos fue herencia de su madre, cuyo abuelo era un conocido músico. Uno de sus hermanos que vivía en Viena, fue maestro del celebrado violinista Joachim. Un hermano de María Cantor fue músico, y uno de sus sobrinos pintor. Si es cierto, como reclaman los defensores psicológicos de la parda mediocridad, que la normalidad y la estabilidad flemática son equivalentes, toda la brillantez artística de su familia puede haber sido la raíz de la inestabilidad de Cantor.

La familia era cristiana. El padre se había convertido al protestantismo, y la madre, desde su nacimiento, fue católica romana. Como su archienemigo Kronecker, Cantor prefirió el lado protestante, y adquirió un gusto singular por la infinita suspicacia de la teología medieval. De no haber sido matemático, es muy posible que hubiera dejado su huella en la filosofía o en la teología. Como una cuestión de interés puede decirse a este respecto que la teoría de Cantor del infinito fue ansiosamente captada por los jesuitas, cuyas agudas mentes lógicas descubrieron en su fantasía matemática más allá de su teológica comprensión, pruebas indudables de la existencia de Dios y de la afinidad de la Santísima Trinidad con su tres-uno, uno-tres, co-igual y co-eterno. Añadiremos que Cantor, que tenía una aguda visión y una lengua todavía más aguda cuando estaba irritado, ridiculizó el pretencioso absurdo de tales pruebas, aunque fuera un devoto cristiano y un conocedor de la teología.

Los primeros estudios de Cantor fueron semejantes a los de la mayor parte de los matemáticos eminentes. Su gran talento y su interés absorbente por los estudios matemáticos fueron reconocidos precozmente (antes de cumplir los 15 años). Su primera educación fue confiada a un preceptor particular, y después siguió un curso en una escuela elemental en San Petersburgo. Cuando la familia se trasladó a Alemania, Cantor asistió primero a algunas escuelas privadas de Francfort y de Darmstadt, ingresando luego en el Instituto de «Tiesbaden» en 1860, cuando tenía 15 años.

Georg estaba decidido a ser matemático, pero su práctico padre, reconociendo la capacidad matemática del muchacho, intentó obstinadamente forzarle a que siguiera los estudios de ingeniería, por ser una profesión más lucrativa. Con motivo de la confirmación de Cantor en 1860, su padre le escribe expresando las esperanzas que han puesto en él todos sus numerosos tíos, tías y primos en Alemania, Dinamarca y Rusia: "Esperan de ti que llegues a ser nada menos que un Theodor Schaeffer, y más tarde, si Dios lo permite, un astro luminoso en el firmamento de la ingeniería". ¿Cuándo reconocerán los padres la presuntuosa estupidez de intentar enganchar a un carro un caballo de carreras?

La piadosa apelación a Dios con la que se pretendía someter al sensible y religioso joven de 15 años hubiera sido rechazada, en nuestra generación, como se rechaza una pelota de fútbol. Pero a Cantor le produjo una grave impresión. Queriendo mucho a su padre, y siendo profundamente religioso, el joven Cantor no podía ver que el anciano estaba justificando simplemente su propia ambición de dinero. Así comenzó la primera desviación de la sensible y aguda mente de Georg Cantor. En lugar de rebelarse, como seguramente lo haría un muchacho de talento de nuestros días, Georg se sometió, hasta que su obstinado padre comprendió que estaba arruinando la vocación de su hijo. Pero en el intento de agradar a su padre en contra de sus propios instintos, Georg Cantor sembró la simiente de la autodesconfianza, que harían de él una fácil víctima del pernicioso ataque de Kronecker llevándolo a dudar del valor de su propia obra. Si Cantor hubiese sido educado como un ser humano independiente jamás habría tenido el humilde respeto a los hombres de reputación establecida que tanto le perjudicó en toda su vida.

El padre cedió cuando el error había sido ya cometido. Para completar la instrucción de Georg, cuando tenía 17 años, el "querido papá" le permitió seguir la carrera matemática universitaria, "Mi querido papá, escribía Georg lleno de gratitud juvenil, podréis daros cuenta del gran placer que me ha producido su carta. Ella establece mi futuro... Ahora soy feliz cuando veo que no se disgustará si sigo mis sentimientos preferidos. Espero que usted, querido padre, ha de vivir para encontrar un placer en mi conducta, dado que mi alma, todo mi ser, vive en mi vocación; lo que un hombre desea hacer y a lo que su compulsión interna le empuja, lo cumplirá". El "papá" no

dudó que merecía este agradecimiento, aunque la gratitud de Georg pueda parecer demasiado servil para esta época.
Cantor comenzó sus estudios universitarios en Zurich, en 1862, pero pasó a la Universidad de Berlín al siguiente año, después de la muerte de su padre. En Berlín se especializó en Matemática, filosofía y física. Dividió su interés entre las dos primeras, y jamás tuvo por la física una verdadera afición. En Matemática los profesores fueron Kummer, Weierstrass y su futuro enemigo Kronecker. Siguiendo la costumbre alemana, Cantor pasó breve tiempo en otra Universidad, y cursó el semestre de 1866 en Göttingen.
Con Kummer y Kronecker en Berlín, la atmósfera matemática estaba altamente cargada de Aritmética. Cantor hizo un profundo estudio de las *Disquisitiones Arithmeticae* de Gauss, y escribió, en el año 1867, su disertación, aceptada para aspirar al título de doctor sobre un punto difícil que Gauss había dejado a un lado respecto a la solución en números enteros x, y, z de la ecuación indeterminada

$$ax^2 + by^2 + cz^2 = 0,$$

donde a, b, c son números enteros. Era un excelente trabajo, pero puede afirmarse que ningún matemático que lo leyera podría vaticinar que el autor, de 22 años, llegaría a ser uno de los más originales creadores de la historia de la Matemática. No hay duda de que el talento se refleja en este primer ensayo, pero no se ve el genio. No hay un solo indicio de gran creador en esta disertación rigurosamente clásica.
Lo mismo puede decirse de todas las obras publicadas por Cantor antes de los 29 años. Eran excelentes, pero podrían haber sido hechas por cualquier hombre brillante que hubiera comprendido totalmente, como Cantor lo hizo, el concepto de las demostraciones rigurosas de Gauss y Weierstrass. El primer amor de Cantor fue la teoría gaussiana de números, hacia la cual se sintió atraído por la dificultad, nitidez y clara perfección de las pruebas. A partir de estos estudios, bajo la influencia de la escuela de Weierstrass, pasó al Análisis riguroso, particularmente a la teoría de las series trigonométricas (series de Fourier).
Las sutiles dificultades de esta teoría (donde las cuestiones de la convergencia de las series infinitas son menos fácilmente accesibles que en la teoría de las series de potencias) parecen haber incitado a Cantor a penetrar más profundamente en los fundamentos del Análisis que cualquiera de sus contemporáneos, y así se vio llevado al estudio de la Matemática y de la filosofía del infinito mismo, que está en el fondo de todas las cuestiones referentes a la continuidad, los límites y la convergencia. Justamente antes de cumplir los treinta años Cantor publicó su primer trabajo revolucionario (en el *Journal* de Crelle) sobre la teoría de conjuntos, que luego describiremos. El inesperado y paradójico resultado referente al conjunto de *todos los* números algebraicos, que Cantor estableció en este trabajo, y la completa novedad de los métodos empleados señalaron inmediatamente al joven autor como un matemático creador de originalidad extraordinaria. El hecho de que no todos aceptaran los nuevos métodos es cuestión aparte; lo que universalmente se admitió era que había aparecido un hombre que había hecho algo fundamentalmente nuevo en Matemática. Debería, por tanto, ser nombrado para un cargo de importancia.
La carrera material de Cantor fue la de cualquiera de los profesores alemanes de Matemática menos eminentes. Jamás logró su ambición de, una cátedra en Berlín, posiblemente la más alta distinción alemana durante el período de la grandeza y de la mayor fecundidad creadora de Cantor (1874-1884, desde los 29 a los 39 años). Toda su carrera profesional activa transcurrió en la Universidad de Halle, una institución de tercer orden, donde fue nombrado *Privatdozent*

(profesor que vive de las matrículas pagadas por sus alumnos), en 1869, a la edad de 24 años. En 1872 fue nombrado profesor ayudante, y en 1879, antes de que la crítica de su obra comenzara a adquirir el carácter de un malicioso ataque personal, fue nombrado profesor ordinario. Sus primeras tareas docentes tuvieron lugar en una escuela femenina de Berlín. Fue habilitado para esta inadecuada tarea después de haber asistido a las áridas conferencias sobre pedagogía pronunciadas por una mediocridad matemática.

Justamente o injustamente Cantor culpó a Kronecker de su fracaso para lograr el ansiado cargo en Berlín. Algunas veces se ha aludido al agresivo sentido gregario de los judíos como un argumento en contra de su nombramiento para actividades académicas; sin embargo no existen odios académicos más violentos que los que pueden separar a un judío de otro cuando está en desacuerdo en materias puramente científicas, o cuando uno de ellos siente celos o temores del otro. Los gentiles se ríen de estos odios que muchas veces les capacitan para cumplir sus rencorosos fines, bajo el disfraz de sincera amistad. Cuando dos intelectuales judíos riñen están en desacuerdo en todo, se acometen como perros, y hacen todo lo que está en su mano para cortar el cuello a su contrincante. Al fin y al cabo quizás sea una forma más decente de combatir, si es que los hombres deben combatir, que la refinada hipocresía de los demás. El objeto de cualquier guerra es destruir al enemigo, y ser sentimental o caballero en un asunto de este tipo es signo de ser mal luchador. Kronecker fue uno de los luchadores mejores en a historia de la controversia científica; Cantor uno de los menos competentes. Kronecker ganó. Pero, como se verá más tarde, la amarga animosidad de Kronecker hacia Cantor no fue totalmente personal, sino, al menos en parte, científica y desinteresada.

El año 1874, cuando apareció el primer trabajo revolucionario de Cantor sobre la teoría de conjuntos fue también el de su matrimonio (tenía 29 años) con Vally Guttmann. Dos hijos y cuatro hijas nacieron de este matrimonio. Ninguno de los hijos heredó la capacidad matemática del padre.

Pasando la luna de miel en Interlaken, conoció un trabajo de Dedekind, quizá el mejor matemático de su época que hizo un serio y simpático intento para comprender la subversiva teoría de Cantor.

Por ser *persona non grata* para los máximos matemáticos de la Alemania del último cuarto del siglo XIX, el profundamente original Dedekind estaba en una posición adecuada para simpatizar con el científicamente menospreciado Cantor. Los profanos suelen imaginar que la originalidad recibe siempre una bienvenida cordial en la ciencia. La historia de la Matemática contradice esta feliz fantasía: el camino de transgresor en una. ciencia bien establecida es probablemente tan áspero como en cualquier otro campo del conservatismo humano, hasta cuando el transgresor ha encontrado algo de valor que supere los estrechos límites de la fanática ortodoxia.

También Dedekind realizó todos sus trabajos ocupando mediocres posiciones; la hipótesis -ahora que la obra de Dedekind es reconocida como una de las más importantes contribuciones a la Matemática que Alemania ha hecho de que Dedekind *prefería* permanecer en lugares secundarios, mientras que los hombres que en ningún sentido eran superiores a él gozaban de la gloria y de la estima pública y académica, chocará a los observadores "arios"

El ideal de los eruditos germanos del siglo XIX era la "seguridad en primer término", y quizá se mostraba esta tendencia en la prudencia gaussiana contra todos los trabajos demasiados radicales. El nuevo hallazgo podría ser concebible, pero no absolutamente exacto. Al fin y al cabo, una enciclopedia bien editada es en general una fuente de información más útil acerca de la manera de volar las alondras que un poema de Shelley sobre la misma cuestión.

En esta atmósfera almibarada, la teoría de Cantor del infinito, una de las contribuciones más revolucionarias a la Matemática de los últimos 2.500 años, gozaba de la misma libertad que una alondra que intenta volar en una atmósfera de engrudo. Hasta en el caso de que la teoría fuera totalmente errónea, y existen algunos que creen que no puede ser mantenida en ninguna forma que se parezca al pensamiento emitido por Cantor, merece algo más que los ataques que recibió, principalmente debido a que era nueva y no tenía nombre en el sagrado calendario de la Matemática ortodoxia.

El trabajo que abrió la senda, publicado en 1884, está dedicado a establecer una propiedad totalmente inesperada y notablemente paradójica del conjunto de *todos los* números algebraicos. Aunque ya hemos hablado de tales números en los capítulos precedentes, volveremos a recordar lo que son, para que se aprecie claramente la naturaleza del hecho asombroso que Cantor demostró, y al decir "demostró" pasamos por alto deliberadamente, por el momento, todas las dudas acerca de la solidez del razonamiento utilizado por Cantor.

Si r satisface una ecuación algebraica de grado n de coeficientes enteros racionales (números enteros comunes) pero no satisface ecuaciones de grado menor que n, entonces r es un número algebraico de grado n.

Esto puede ser generalizado. Es fácil demostrar que cualquier raíz de una ecuación del tipo

$$c_0x^n + c_1x^{n-1} + \dots + c_{n-1}x + c_n = 0$$

en la cual las c son números algebraicos cualquiera (según se han definido antes), es un número algebraico. Por ejemplo, de acuerdo con este teorema, todas las raíces de

$$(1-3\sqrt{-1})x^2 - (2+5\sqrt{17})x + \sqrt[3]{90} = 0$$

son números algebraicos, porque los coeficientes lo son. (El primer coeficiente satisface $x^2 - 2x + 10 = 0$, el segundo, $x^2 - 4x - 421 = 0$, el tercero, $x^3 - 90 = 0$, de los grados respectivos 2, 2, 3).

Imagine el lector, si puede, el conjunto de *todos* los números algebraicos. *Entre* éstos estarán *todos* los números enteros racionales positivos, 1, 2, 3..., puesto que cualquiera de ellos, por ejemplo n, satisface una ecuación algebraica en la cual los coeficientes (1, y $-n$) son enteros racionales. Pero *además de éstos,* el conjunto de *todos* los números algebraicos contiene *todas* las raíces de *todas* las ecuaciones cuadráticas de coeficientes enteros racionales, y todas las raíces de *todas* las ecuaciones cúbicas de coeficientes enteros racionales, y así indefinidamente. ¿No es *intuitivamente evidente* que el conjunto de todos los números algebraicos contendrá *infinitamente más* números que su subconjunto de los enteros racionales 1, 2, 3, ...*?* Podrá, en efecto, ser así, pero ello es falso.

Cantor demostró que el conjunto de todos los enteros racionales 1, 2, 3... contiene precisamente tantos números como el "infinitamente más numeroso" conjunto de *todos* los números algebraicos.

Una prueba de esta afirmación paradójica no se puede dar en este lugar, pero puede hacerse fácilmente inteligible el tipo de recurso, el de "correspondencia uno a uno", sobre el cual se basa la demostración. Esto llevará a las mentes de tipo filosófico una comprensión de lo que es un *número cardinal.* Antes de explicar este simple pero algo ilusorio concepto, será útil examinar una opinión sobre ésta y otras definiciones de la teoría de Cantor que subraya una distinción entre las actitudes de algunos matemáticos y muchos filósofos respecto a todas las cuestiones que se refieren a "número" o "magnitud".

"Un matemático jamás define las magnitudes en sí mismas, como un filósofo está tentado a hacer; define su igualdad, su suma y su producto, y estas definiciones determinan, o más bien constituyen, todas las propiedades matemáticas de las magnitudes. De una manera aun más abstracta y más formal el matemático *establece* símbolos, y al mismo tiempo *prescribe* las reglas de acuerdo con las cuales deben ser combinados; estas reglas bastan para caracterizar estos símbolos y para darles un valor matemático. Brevemente, crea entidades matemáticas por medio de convenciones arbitrarias, en la misma forma como las diversas piezas del ajedrez se definen por los convenio que gobiernan sus movimientos y las relaciones entre ellas"[2]. No todas las escuelas del pensamiento matemático suscribirían estas opiniones, pero sugieren al menos, una "filosofía" responsable de la siguiente *definición* de números cardinales.

Obsérvese que la fase inicial en la definición es el concepto de "mismo número cardinal" en el espíritu de las observaciones iniciales de Couturat; el "número cardinal" surge, pues, como el ave fénix de las cenizas de su "igualdad". Trátase de una cuestión de *relaciones* entre conceptos no definidos explícitamente.

Se dice que dos conjuntos tienen el *mismo número cardinal* cuando todas las cosas de los dos conjuntos pueden ser *apareadas* una a una. Después del apareamiento no existen cosas sueltas en ninguno de los dos conjuntos.

Algunos ejemplos aclararán esta esotérica definición. Trátase de una de esas nimiedades obvias y fecundas que son tan profundas que pasan inadvertidas durante millares de años. Los conjuntos (x, y, z), . *(a, b, c)* tienen el mismo número cardinal (no cometeremos la tontería de decir: "¡Es natural! Cada uno contiene *tres letras"), debido* a que podemos *aparear* las cosas x, y, z del primer conjunto con las cosas a, *b*, c del segundo, del siguiente modo: *x* con *a*, *y* con *b, z* con c, y después de hacer esto se observará que ninguna cosa queda suelta en ambos conjuntos. Como es natural, existen otras formas de efectuar el apareamiento. Además, en una comunidad cristiana que practique la monogamia si 20 matrimonios se sientan a cenar, el conjunto de maridos tendrá el mismo número cardinal que el de mujeres.

Como otro ejemplo de esta "manifiesta" igualdad recordaremos el ejemplo de Galileo de la sucesión de todos los cuadrados enteros positivos y la de todos los enteros positivos

$$1^2, 2^2, 3^2, 4^2, \ldots, n^2, \ldots$$
$$1, 2, 3, 4, \ldots, n, \ldots$$

La diferencia "paradójica" entre éste y el ejemplo anterior se aprecia claramente: Si todas las mujeres se *retiran* a otro salón dejando a sus esposos bebiendo y charlando existirán precisamente 20 seres humanos sentados ante la mesa, justamente la mitad de los qué había antes. Pero si todos los cuadrados abandonan los números naturales, existirán tantos como existían antes: Nos plazca o no (no debería disgustarnos si fuéramos animales racionales) aparece ante nosotros el milagro de que *una parte de un todo puede tener el mismo número cardinal que el todo. Si* a alguien le disgusta la definición del "mismo número cardinal" por apareamiento puede pedírsele que invente otra mejor. La intuición (masculina, femenina o matemática) ha sido excesivamente valorada. La intuición es la raíz de toda superstición.

[2] L. Couturat, *De d'infini mathématique,* París, 1896, pág. 49. Con la advertencia de que gran parte de esta obra está anticuada, se puede recomendar por su claridad al lector general.
Una explicación de los elementos del cantorismo por un notable especialista polaco, que está dentro de la comprensión de cualquiera que tenga una mediana educación y cierto gusto por el razonamiento abstracto, se encuentra en las *Leqons sur les nombres transfinis,* por Waclaw Sierpinski, París, 1928. El prefacio de Borel proporciona las advertencias necesarias. El resumen mencionado de Couturat tiene cierto interés histórico en relación con el programa de Hilbert. Se anticipa treinta años a la enunciación de Hilbert de su credo formalista.

Obsérvese en este momento que ha sido glosada una dificultad de primera magnitud. ¿Qué *es un conjunto,* o *una clase? "That is the question",* repitiendo las palabras de Hamlet. Volveremos sobre esa cuestión, pero no daremos la respuesta. Quien consiga responder a la inocente pregunta satisfaciendo la crítica de Cantor quizá podrá hacer las más graves objeciones contra su ingeniosa teoría del infinito y al mismo tiempo establecer el Análisis matemático sobre una base no sentimental. Para apreciar que la dificultad no es trivial, intentemos imaginar el conjunto de *todos los* enteros racionales positivos 1, 2; 3... preguntándonos si, como hace Cantor, es posible retener esta totalidad que es una "clase", en nuestra mente como un objeto definido del pensamiento, tan fácilmente como la clase *x, y, z* de tres letras. Cantor nos obliga justamente a hacer esto para llegar a los números *transfinitos* que creó.

Procediendo ahora a la definición del "número cardinal", introducimos un término técnico conveniente: dos conjuntos o clases cuyos miembros pueden ser apareados uno con otros (como los ejemplos antes citados) se dice que son *semejantes. ¿Cuántas* cosas existen en el conjunto (o clase) *x, y, z*? Sin duda tres. Pero, ¿qué es "tres"? Una respuesta está contenida en la siguiente definición: "El *número* de cosas de una clase dada es la *clase* de todas las clases que son semejantes a la clase dada".

Esta definición no da en realidad explicación alguna; debe ser admitida como es. Fue propuesta en 1879 por Gottlob Frege, y además (independientemente) por Bertrand Russell en 1901. Una ventaja que tiene sobre otras definiciones de "número cardinal de una clase" es la de ser aplicable tanta a las clases finitas como a las infinitas. Quienes juzguen esta definición demasiado mística para la Matemática pueden evitarla, siguiendo el consejo de Couturat, y no intentar *definir* el "número cardinal". Sin embargo, en este camino también se tropieza con dificultades.

El resultado espectacular de Cantor de que el conjunto de todos los números algebraicos es semejante (en el sentido técnico antes definido) al subconjunto de todos los enteros racionales positivos, fue la primera de muchas propiedades completamente inesperadas de las clases infinitas. Concediendo por el momento que su razonamiento al descubrir estas propiedades es sólido, o al menos inobjetable en la forma en que Cantor lo estableció, lo que puede considerarse riguroso debemos admitir su fuerza.

Consideremos por ejemplo la "existencia" de números trascendentes. En un capítulo anterior vimos el tremendo esfuerzo que le costó a Hermite demostrar la trascendencia de un número *particular* de este tipo. Hasta nuestros días no se conoce un método general que pruebe la trascendencia de cualquier número que sospechamos es trascendente; cada nuevo tipo requiere la invención de especiales e ingeniosos métodos. Se sospecha, por ejemplo, que el número (es una constante aunque su definición se considera que puede ser una variable) que se define como el limite de

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}-\log n$$

en que n tiende a infinito, es trascendente, pero no podemos demostrar que lo sea. Lo que se requiere es mostrar que esta constante no es una raíz de *cualquier* ecuación algebraica de coeficientes enteros racionales.

Todo esto plantea la cuestión: "¿Cuántos números trascendentes existen?" ¿Son *más* numerosos que los enteros o los racionales, o los números algebraicos como un todo, o son *menos* numerosos? Dado que (por el teorema de Cantor) los números enteros, los racionales y *todos los* números algebraicos son igualmente numerosos, la cuestión que se plantea es ésta: ¿Pueden los números trascendentales ser contados como 1, 2, 3...? ¿Es la clase de todos los números trascendentes *semejantes* a la clase de todos los enteros racionales positivos? La respuesta es no; los trascendentes son *infinitamente más numerosos que los enteros.*

Aquí comenzamos a entrar en los aspectos discutidos de la teoría de conjuntos. La conclusión enunciada era como un desafío para un hombre del temperamento de Kronecker. Discutiendo la demostración de Lindemann, de que *n* es trascendente (véase Capítulo XXIV), Kronecker preguntaba: "¿Qué uso tiene su bella investigación referente a *n?* ¿Por qué estudia tales problemas, dado que los números irracionales (y por tanto los trascendentes) no existen?" Podemos imaginar el efecto del escepticismo de la prueba de Cantor de que los transcendentes son infinitamente más numerosos que los enteros 1, 2, 3... los cuales, según Kronecker, son la obra más noble de Dios y los *únicos* números que "existen".

No seria posible en este lugar pretender hacer ni siquiera un resumen de la demostración de Cantor, pero de las siguientes consideraciones podrá deducirse cierta idea respecto al tipo de razonamiento que empleó. Si una clase es semejante (en el sentido técnico antes mencionado) a la clase de todos los enteros racionales positivos, la clase se dice que es *numerable.* Las cosas en una clase numerable pueden ser contadas, como 1, 2, 3...; las cosas en una clase no numerable no pueden ser contadas como 1, 2, 3...; existirán más cosas en una clase no numerable que en una clase numerable. ¿Existen las clases no numerables? Cantor así lo demostró. En efecto, las clases de todos los puntos sobre cualquier segmento lineal, sin importar que el segmento sea pequeño (siempre que sea más que un solo punto), es no numerable.

Tenemos así un indicio del porqué los números trascendentes son no numerables. En el capitulo sobre Gauss vimos que cualquier raíz de cualquier ecuación algebraica es representable por un punto del plano de la Geometría cartesiana. Todas estas raíces forman el conjunto de todos los números algebraicos que Cantor demostró eran numerables. Pero si los puntos sobre un simple segmento lineal son no numerables, se deduce que *todos* los puntos del plano cartesiano son igualmente no numerables. Los números algebraicos están distribuidos en el plano como las estrellas sobre un cielo oscuro; la densa oscuridad es el firmamento de los trascendentes.

Lo más notable de la demostración de Cantor es que no proporciona ningún medio para construir un solo número trascendente. Para Kronecker tal prueba carece totalmente de sentido. Muchos ejemplos menos decisivos de "pruebas de la existencia" despertaban su ira. Uno de ellos, en particular, tiene interés, pues profetizó la objeción de Brouwer al uso de la lógica clásica (aristotélica) en los razonamientos sobre conjuntos infinitos.

Un polinomio

$$ax^n + bx^{n-1} + o + l$$

en que los coeficientes *a, b ... l* son números racionales, se dice que será *irreducible si* no se puede descomponer en un producto de dos polinomios que tengan coeficientes racionales. Ahora bien, es un juicio lleno de significación para la mayor parte de los seres humanos afirmar, como Aristóteles afirma, que un determinado polinomio es o no es irreducible.

No así para Kronecker. Hasta que se obtenga algún proceso definido capaz de ser llevado a cabo en un número *finito* de etapas mediante el cual podamos establecer la reducibilidad de un polinomio dado, no tendremos derecho, dentro de la lógica, de acuerdo a Kronecker, a usar el concepto de irreducibilidad en nuestras pruebas matemáticas. Hacer otra cosa, según él, es incurrir en incongruencias en nuestras conclusiones y, a lo sumo, el uso de la "irreducibilidad" sin el proceso descripto, sólo puede darnos un veredicto de "no demostrado". Todo este razonamiento *no constructivo* es, según Kronecker, ilegítimo.

Como el razonamiento de Cantor en su teoría de las clases infinitas es de tipo no constructivo, Kronecker lo consideró como una forma peligrosa de locura matemática. Creyendo que la Matemática sería llevada al manicomio bajo la dirección de Cantor, y siendo un devoto apasionado de lo que él consideraba la verdad de esa ciencia, Kronecker atacó vigorosamente "la teoría positiva del infinito" y a su hipersensible autor con todas las armas que tuvo en su mano, con el trágico resultado de que no fue la teoría de conjuntos la que cayó en el manicomio, sino el propio Cantor. El ataque de Kronecker derrumbó al creador de la teoría.

En la primavera de 1884, cuando tenia cuarenta años, Cantor sufrió el primero de aquellos completos derrumbes que se repitieron con variable intensidad en el resto de su larga vida, y que lo llevaron con frecuencia a las clínicas mentales. Su temperamento explosivo agravó su mal. Los profundos ataques de depresión le humillaban ante sus propios ojos y comenzó a dudar de la solidez de su obra. Durante un intervalo lúcido solicitó de las autoridades universitarias de Halle que le trasladaran desde su cátedra de Matemática a una cátedra de filosofía. Buena parte de la teoría positiva del infinito fue realizada en el intervalo entre dos accesos. Al restablecerse de ellos se daba cuenta de que su mente se hacía extraordinariamente clara.

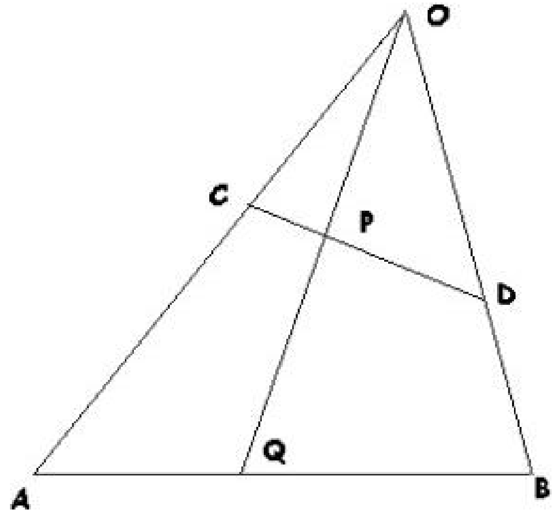
Kronecker ha sido quizá excesivamente culpado por la tragedia de Cantor; su ataque fue una de las muchas causas que contribuyeron a ella. La falta de reconocimiento amargó al hombre que creía había dado el primer y decisivo paso hacia una teoría racional del infinito, y esto le hizo caer en la melancolía y en la locura. Kronecker, sin embargo, parece que fue, en gran parte, responsable del fracaso de Cantor para lograr el cargo que deseaba en Berlín. De ordinario no se consideraba moral para un hombre de ciencia realizar un salvaje ataque a la obra de un contemporáneo ante sus discípulos. El desacuerdo puede ser tratado objetivamente en las revistas científicas. Kronecker comenzó en 1891 a criticar la obra de Cantor ante sus discípulos de Berlín, y era indudable que no existía espacio para ambos bajo el mismo techo. Como Kronecker ya estaba en posesión del cargo, Cantor tuvo que resignarse y renunciar a sus aspiraciones.

No carecía, sin embargo, de comodidades. El amable Mittag-Leffler no sólo publicó algunos de los trabajos de Cantor en su revista *(Acta Mathematica),* también consoló a Cantor en su lucha contra Kronecker. En un solo año, Mittag-Leffler recibió nada menos que 52 cartas del pobre Cantor. Entre los que creyeron en las teorías de Cantor, el genial Hermite fue uno de los más entusiastas. Su cordial aceptación de la nueva doctrina sirvió de gran alivio a Cantor: "Los elogios que Hermite me hace en su carta... respecto a la cuestión de la teoría de conjuntos son tan importantes en mi opinión, tan inmerecidos, que no me atrevo a publicarlos para no incurrir en el reproche de haber sido deslumbrado por ellos".

Al iniciarse el nuevo siglo la obra de Cantor sólo fue aceptada como una contribución fundamental a la Matemática, y particularmente a los fundamentos del Análisis. Pero, por desgracia para la teoría, las paradojas y antinomias que aun la infectan comenzaron a hacerse notar. Esta será, al fin, la máxima contribución que la teoría de Cantor está destinada a hacer a la Matemática, pues su existencia insospechada en los rudimentos del razonamiento lógico y matemático acerca del infinito fue la inspiración directa del actual movimiento crítico de todo razonamiento deductivo. Podemos, pues, esperar que así se alcance una Matemática más rica y "más verdadera", libre de incongruencias que la Matemática de la era precantoriana.

Los resultados más notables de Cantor fueron obtenidos en la teoría de los conjuntos *no numerables,* el ejemplo más sencillo de los cuales es el de todos los puntos en un segmento lineal. En este lugar sólo puede ser mencionada una de las más sencillas che sus conclusiones. Contrariamente a lo que la intuición pueda predecir, dos segmentos lineales desiguales contienen el *mismo número* de puntos. Recordando que dos conjuntos contienen el mismo número de cosas si éstas se pueden aparear una a una, y sólo en este caso, fácilmente veremos lo razonable de la

conclusión de Cantor. Colocar los segmentos desiguales *AB*, *CD co*mo en la figura. La línea OPQ corta *CD* en el punto *P, y AB* en Q; P
y Q son así apareados. Cuando OPQ gira alrededor de 0, el punto P corta a *CD,* mientras Q corta simultáneamente *AB, y cada* punto de CD tiene uno y solo un punto "apareado" con *AB.*



Aun se puede demostrar un resultado más inesperado. Todo segmento lineal, por pequeño que sea, contiene tantos puntos como una línea recta infinita. Además, el segmento contiene tantos puntos como existen en todo un plano, o en el total espacio tridimensional, o en la totalidad del espacio de *n* dimensiones (donde *n* es *cualquier* entero mayor que cero), o, finalmente, en un espacio de un número infinito numerable de dimensiones.
A todo esto todavía no hemos intentado definir una clase o un conjunto. Posiblemente (como Russell mantuvo en 1912) no es necesario hacer esto para tener una clara concepción de la teoría de Cantor, o para que la teoría sea congruente consigo misma, que ya es bastante exigencia para cualquier teoría matemática. De todo modos, la actual discusión parece requerir que se dé alguna definición clara y consecuente. La siguiente se ha considerado satisfactoria.
Un conjunto se caracteriza por tres cualidades: contiene todas las cosas a las cuales pertenece una cierta propiedad definida (por ejemplo el color, el volumen, el gusto); ninguna cosa que no tenga esa propiedad pertenece al conjunto; cada cosa del conjunto es reconocible como esa cosa, y como diferente de cualquier otra de las cosas del conjunto, brevemente, cada cosa del conjunto tiene una individualidad reconocible permanente. El mismo conjunto se debe considerar como un todo. Esta definición podrá ser demasiado drástica para su uso. Consideremos, por ejemplo, lo que sucede al conjunto de Cantor de todos los números trascendentes al obedecer a la tercera exigencia.
En este momento podemos contemplar retrospectivamente toda la historia de la Matemática, o la parte de ella revelada por los tratados de los maestros matemáticos en sus trabajos puramente técnicos, y observar dos formas de expresión que se repiten constantemente en casi todas las exposiciones matemáticas. El lector quizá se haya irritado por el uso repetido de frases, como "podemos encontrar un número entero mayor que 2", o "podemos elegir un número menor que *n y* mayor que *n - 2*". La elección de tal fraseología no es simplemente pedantería estereotipada. Existe una razón para su uso, y los escritores cuidadosos saben exactamente lo que dicen cuando afirman que "podemos encontrar, etc.". Dichos autores quieren decir que *pueden hacer lo que dicen.*

Frente a esta frase se halla otra que se repite una y otra vez en los trabajos matemáticos, "existe". Por ejemplo, algunos dicen "existe un número mayor que 2" o "existe un número menor que y mayor que n - 2". El uso de tal fraseología tiene lugar, sin duda, en el credo que Kronecker consideró insostenible, a no ser, como es natural, que la "existencia" sea demostrada por una construcción. La existencia no está probada para los conjuntos (como han sido definidas antes), que aparecen en la teoría de Cantor.

Estas dos formas de hablar divide a los matemáticos en dos tipos: los que dicen "nosotros podemos" creen (posiblemente de un modo subconsciente) que la Matemática es una invención puramente humana; los hombres que dicen "existe" creen que la Matemática tiene una "existencia" extrahumana por sí misma, y que "nosotros" simplemente actuamos sobre las "verdades eternas" de la Matemática en nuestro viaje por la vida, en la misma forma como un hombre, que pasa por tina ciudad, atraviesa cierto número de calles con cuya construcción no tiene nada que ver.

Los teólogos son hombres que dicen "existe"; los escépticos prudentes son en su mayor parte hombres que dicen "nosotros". "Existe una infinidad de números pares, o de primos", dicen los abogados de la "existencia" extrahumana; "los construimos" dice Kronecker y los hombres que afirman "nosotros".

En un famoso ejemplo del Nuevo Testamento puede verse que la distinción no es en modo alguno superficial. Cristo afirma que el Padre "existe"; Felipe pregunta: "Muéstranos al Padre y ello nos bastará". La teoría de Cantor está cercana a los partidarios de la "existencia". Es posible que la pasión de Cantor por la teología haya determinado su fidelidad. De ser así, tendríamos también que explicarnos por qué Kronecker, conocedor también de la teología cristiana, fue rabiosamente un hombre del tipo "nosotros".

Un ejemplo muy notable e importante del modo "existencia" de considerar la teoría de conjuntos proporciona el postulado de Zermelo (enunciado 1904). "Para todo conjunto *M* cuyos elementos son conjuntos P (es decir, *M* es un conjunto de conjuntos o una clase de clases), no estando vacías y no superponiéndose los conjuntos (ninguno de los dos contiene elementos comunes), existe al menos un conjunto N que contiene precisamente un elemento de cada uno de los conjuntos *P* que constituyen *M*". Comparando este concepto con la definición antes dada de un conjunto (o clase), se observará que los hombres "nosotros" no consideran el postulado evidente por sí mismo, si el conjunto *M* consiste, por así decir, en una infinidad de segmentos lineales que no se superponen. Aunque el postulado parece bastante razonable, los intentos para probarlo han fracasado. Es de considerable importancia en todas las cuestiones relacionadas con la continuidad.

Unas palabras acerca de cómo este postulado llegó a ser introducido en la Matemática plantearán otros problemas no resueltos de la teoría de Cantor. Una serie de cosas contables diferentes, como todos los ladrillos de una pared, se puede ordenar fácilmente; necesitamos sólo contarlas como 1, 2, 3..., en cualquiera de las múltiples y diferentes formas que ellas mismas sugieren. Pero, ¿cómo ordenar todos los puntos de una línea recta? No pueden ser contados como 1, 2, 3... La tarea parece infructuosa cuando consideramos que entre dos puntos cualesquiera de la línea "podemos encontrar" o "existen" otros puntos de la línea. Si cada vez que contamos dos ladrillos adyacentes surge otro entre ellos, en la pared, nuestra cuenta se hará confusa. De todos modos; los puntos de una línea recta parecen tener cierto tipo de orden, podemos decir si un punto está a la derecha o a la izquierda de otro, y así sucesivamente. Los intentos para ordenar los puntos de una línea no han dado buen resultado. Zermelo propuso su postulado como un medio para hacer el ensayo más fácil, pero no ha sido aceptado de un modo general como una suposición razonable o como un procedimiento de uso seguro.

La teoría de Cantor contiene aún más cuestiones acerca del infinito actual y de la "Aritmética" de los números transfinitos (infinitos) que las que aquí hemos indicado. Pero como la teoría está aún en la fase de discusión podemos seguir adelante considerándola como un enigma. ¿"Existe" o "podemos construir" un conjunto infinito que no es semejante (en el sentido técnico del apareo uno a uno) al conjunto de todos los enteros racionales positivos ni de todos los puntos de una línea? La respuesta no se conoce.

Cantor murió en un hospital de enfermedades mentales en Halle, el 6 de enero de 1918, teniendo 73 años. Ya le habían sido concedidos múltiples honores y su obra había logrado ser reconocida; hasta la antigua amargura contra Kronecker había sido olvidada. Fue, sin duda, una satisfacción para Cantor recordar que él y Kronecker se habían reconciliado, al menos superficialmente, algunos años antes de la muerte de Kronecker, ocurrida en 1891. Si Cantor viviera hoy podría estar orgulloso del movimiento que se ha producido hacia un pensamiento más riguroso en toda la Matemática, del cual es ampliamente responsable por sus esfuerzos para colocar el Análisis (y el infinito) sobre una base sólida.

Contemplando retrospectivamente la larga lucha para precisar y hacer utilizable en Matemática los conceptos de número real, continuidad, límite e infinito, vemos que Zenón y Eudoxio no están tan lejos de Weierstrass, Dedekind y Cantor, como podía suponerse pensando en los 24 ó 25 siglos que separan la Alemania moderna de la antigua Grecia. No hay duda de que poseemos un concepto más claro de la naturaleza de las dificultades que nuestros predecesores tuvieron, debido a que vemos los mismos problemas no resueltos surgiendo con nuevos aspectos y en campos en que los antiguos jamás soñaron. Pero decir que hemos eliminado las antiguas dificultades, es un error evidente. De todos modos, los resultados obtenidos significan un progreso mayor que el que nuestros predecesores pueden con justicia pretender haber logrado. Hemos calado más hondo, y hemos descubierto que algunas de las "leyes", por ejemplo las de la lógica aristotélica, que aceptaban en su razonamiento pueden ser reemplazadas con ventaja por otras, puras convenciones, en nuestros ensayos para relacionar nuestras experiencias. Como ya hemos dicho, la obra revolucionaria de Cantor dio el impulso inicial a nuestra actividad actual. Pero pronto se descubrió, 21 años antes de la muerte de Cantor, que esta revolución era demasiado revolucionaria o no suficientemente revolucionaria. Esto último parece ser lo cierto. El primer brote de la contrarrevolución fue iniciado en 1897 por el matemático italiano Burali-Forti, quien presentó una flagrante contradicción mediante el razonamiento del tipo usado por Cantor en su teoría de conjuntos infinito. Esta paradoja fue tan sólo la primera de otras muchas, y como requeriría una larga explicación para hacerla inteligible la sustituiremos por la de Russell (año 1908).

Ya hemos mencionado a Frege, quien dio la definición de "la clase de todas las clases semejante a una clase dada" del número cardinal de la clase dada. Frege empleó muchos años intentando colocar la Matemática de los números sobre una base lógicamente sólida. La obra de su vida es un *Grundgesetze der Arithmetick* (*Las leyes fundamentales de la Aritmética*), de la cual el primer volumen fue publicado en 1893, y el segundo en 1903. En esta obra se usa el concepto de conjunto. También se hace un abundante empleo de invectivas más o menos sarcásticas contra los manifiestos dislates y múltiples estupideces en que incurrieron los que antes se habían ocupado de los fundamentos de la Aritmética. El segundo volumen termina con el siguiente párrafo:

"Un hombre de ciencia es difícil que encuentre algo más indeseable que ver cómo se derrumban los cimientos cuando la obra está terminada. Me he visto en esta situación por una carta de Mr. Bertrand Russell cuando la obra estaba casi en prensa".

Russell comunicó a Frege su ingeniosa paradoja de "el conjunto de todos los conjuntos que no son elementos de ellos mismos". ¿Es este conjunto un miembro de sí mismo? Ambas cuestiones pueden ser consideradas como falsas meditando ligeramente sobre ellas. Sin embargo, Frege utilizó libremente el "conjunto de todos los conjuntos".

Se han propuesto muchas maneras para evadir o eliminar las contradicciones que comenzaron a explotar como una cortina de fuego sobre la teoría de Frege, Dedekind, Cantor de los números reales, continuidad y el infinito. Frege, Cantor y Dedekind abandonaron el campo batidos y descorazonados. Russell propuso su "principio del círculo vicioso" como un remedio: "Todo lo que englobe una colección no debe ser un miembro de la colección". Más tarde llevó adelante su "axioma de reducibilidad", el cual, como ha sido prácticamente abandonado, no merece ser descubierto. Durante un tiempo, estos métodos para restaurar la teoría fueron brillantemente eficaces (salvo para los matemáticos alemanes que jamás tragaron la píldora). Poco a poco, a medida que se abría camino el examen crítico de todo razonamiento matemático, la física fue lanzada a los perros, y se inició un esfuerzo concertado para descubrir cuál era realmente el mal del enfermo en su sistema de números irracionales y reales antes de administrar nuevos medicamentos.

El actual esfuerzo para comprender nuestras dificultades se origina en la obra de David Hilbert (1862-1942), de Göttingen, en 1899, y en la de L. E. J. Brouwer (1881) de Amsterdam, en 1912. Estos dos hombres y sus numerosos continuadores tienen la finalidad común de colocar el razonamiento matemático sobre una base sólida, aunque en diversos respectos sus métodos y filosofías estén en abierta oposición. Parece improbable que ambos puedan estar en. posesión de la verdad, como cada uno de ellos parece creer.

Hilbert se remontó a Grecia para la iniciación de su filosofía de la Matemática. Resumiendo el drama pitagórico de una serie de postulados rígida y completamente enunciados, de los cuales debería proceder por estricto razonamiento deductivo el argumento matemático, Hilbert hizo más preciso, de que había sido entre los griegos, el programa del desarrollo de la Matemática, por postulados y en 1899 apareció la primera edición de su obra sobre los fundamentos de la Geometría. Una cosa exigía Hilbert en la cual los griegos no parece que habían pensado, la de que los postulados propuestos para la Geometría deberán ser congruentes entre sí (libres de contradicciones ocultas, internas). Obtener tal prueba para la Geometría es mostrar que cualquier contradicción en la Geometría desarrollada por medio de postulados implicaría una contradicción en la Aritmética. El problema queda así desplazado para demostrar la coherencia de la Aritmética y así permanece actualmente.

Una vez más interrogamos a la esfinge para que nos diga lo que es un número. Tanto Dedekind como Frege huyeron al infinito, Dedekind con sus clases infinitas que definen los irracionales, Frege con su clase de todas las clases semejante a una clase dada que define un número cardinal, para interpretar los números que deslumbraron a Pitágoras. Hilbert busca la respuesta en el infinito, que, según cree, es necesario para una comprensión de lo finito. Subraya su creencia de que el cantorismo será definitivamente redimido del purgatorio en el cual se agita ahora. "La teoría de Cantor me parece el fruto más admirable de la mente matemática, y una de las conquistas más preciosas de los procesos intelectuales del hombre". Pero admite que las paradojas de Burali-Forti, Russell y otros no han sido aun resueltas: Sin embargo, su fe está por encima de todas las dudas: "Nadie nos expulsará del paraíso que Cantor ha creado para nosotros". Pero en este momento de exaltación aparece Brouwe esgrimiendo en su mano derecha algo que parece una espada flameante. La persecución comienza: Dedekind, en el papel de Adán, y Cantor, disfrazado de Eva, miran temerosamente la salida bajo la hosca mirada del inflexible holandés. El método de los postulados para asegurar la libertad propuesto por Hilbert cumplirá, dice Brouwer, su fin, no producir contradicciones, pero "no podrá lograrse de este modo nada que tenga valor matemático; una teoría falsa que no se detiene por una contradicción no es por ello menos falsa, lo mismo que un plan criminal que no esté frenado por un tribunal no es menos criminal".

Las raíces de la objeción de Brouwer al "placer criminal" de sus opositores son algo nuevo, al menos en Matemática. Brouwer objeta el uso ilimitado de la lógica aristotélica, particularmente al ocuparse de los conjuntos *infinitos*, y mantiene que tal lógica está llamada a producir contradicciones cuando se aplica a conjuntos que no pueden ser definitivamente *construidos* en el sentido de Kronecker (debe darse una regla por la cual se puedan construir las cosas). El principio de exclusión del tercer término (una cosa debe tener cierta propiedad o no debe tener esa propiedad, por ejemplo, en la afirmación de que un número es primo o no es primo) sólo puede usarse legítimamente cuando se aplica a conjuntos *finitos*.

Aristóteles ideó su lógica como un conjunto de reglas para conjuntos finitos, basando su método sobre la experiencia humana y no hay razón para suponer que una lógica que es adecuada para lo finito continuará produciendo resultados congruentes (no contradictorios) cuando se aplica al *infinito*. Tal modo de pensar parece suficientemente razonable cuando recordamos que la definición de un conjunto infinito subraya que una *parte* de un conjunto *infinito* puede contener precisamente tantas cosas como *todo* el conjunto (según hemos mencionado muchas veces). Una situación que jamás se produce para un conjunto finito, donde "parte" significa algo, *pero no todo* (como ocurre en la definición de un conjunto infinito).

Aquí tenemos lo que algunos consideran la raíz de la dificultad en la teoría del infinito actual de Cantor. La *definición* de un conjunto (según se ha enunciado tiempo atrás) según la cual *todas* las cosas que tienen cierta cualidad están "unidas" para formar un "conjunto" (o "clase"), no es adecuada como base para la teoría cantoriana en la que la definición no es constructiva (en el sentido de Kronecker) o supone una construcción que ningún mortal puede realizar. Brouwer pretende que el uso del principio de exclusión del tercer término en tal situación es, a lo sumo, una simple guía heurística para proposiciones que *pueden ser* verdaderas, pero que no es necesario que así ocurra, hasta cuando han sido deducidas por una rígida aplicación de la lógica aristotélica y dice que numerosas falsas teorías (incluyendo la de Cantor) han sido erigidas sobre este gastado fundamento durante el pasada medio siglo.

Tal revolución en los rudimentos del pensamiento matemático no podía dejar de ser combatida. El movimiento radical de Brouwer hacia la izquierda fue acelerado por un bramido de la derecha reaccionaria "Lo que Weyl y Brouwer están haciendo (Brouwer es él jefe, Weyl su acompañante en la revuelta) es seguir los pasos de Kronecker", decía Hilbert, el campeón del *status quo*. "Están intentando restablecer la Matemática lanzando por la borda todo lo que no les agrada y dificulta su acción. El efecto es desmembrar nuestra ciencia y correr el riesgo de perder una gran parte de nuestro capital más valioso. Weyl y Brouwer condenan los conceptos generales de números irracionales, de funciones (hasta de las funciones que se presentan en la teoría de números), los números transfinitos de Cantor, etc., el teorema de que una serie infinita de enteros positivos tiene un mínimo y hasta la ley de exclusión del tercer término, como por ejemplo la afirmación: existe sólo un número finito de números primos o existen infinitos. Trátase de teoremas y formas de racionamiento prohibidos (para ellos). Creo que lo mismo que Kronecker fue impotente para abolir los números irracionales, no menos impotentes resultarán los esfuerzos actuales. ¡No! El programa de Brouwer no es una revolución, sino simplemente la repetición de un vano golpe de mano con antiguos métodos, pero que ha sido emprendido con mayor inteligencia y fracasará de modo manifiesto. En la actualidad el Estado (la Matemática) está perfectamente armado y fortalecido merced a los trabajos de Frege, Dedekind y Cantor. Los esfuerzos de Brouwer y Weyl serán vanos".

A esto, el bando contrario replica encogiéndose de hombros, y continuando su gran y fundamentalmente nueva tarea de colocar la Matemática (particularmente los fundamentos del Análisis) sobre una base más firme que la que sirvió a los hombres de los últimos 2.500 años, desde Pitágoras a Weierstrass.

¿Cómo será la Matemática dentro de una generación, cuando, según esperamos, estas dificultades hayan desaparecido? Sólo un profeta o el séptimo hijo de un profeta puede introducir su cabeza en el peligroso lazo corredizo de la predicción. Pero si existe una continuidad en la evolución de la Matemática, y la mayoría de los observadores desapasionados creen que así es, la Matemática del futuro será más amplia, más firme y con un contenido más rico que la que nuestros predecesores conocieron.

A las controversias del pasado terció de siglo se han añadido ya nuevos campos -incluyendo lógicas totalmente nuevas, al vasto dominio de la Matemática, y lo nuevo está siendo rápidamente consolidado y coordinado con lo antiguo. Si podemos aventurar una predicción, diremos que lo que está por venir será más fresco, más joven en todos los respectos y más cercano al pensamiento humano y a las necesidades humanas, más libre de apelar para su justificación a "existencias" extrahumanas. El espíritu de la Matemática es eternamente joven. Como Cantor dijo: "La esencia de la Matemática reside en su libertad". La "revolución" presente es tan sólo otra afirmación de esa libertad.

Ofuscada y batida continúa trabajando,
fatigada y enferma del alma trabaja aún más,
sostenida por su voluntad indomable:
Las manos modelando y el cerebro profundizando,
y todo su dolor se convertido en trabajo,
hasta que la muerte, la enemiga amiga,
atravesando con su sable
ese poderoso corazón de corazones,
termine la amarga guerra.

James Thomson